ZUM PROBLEM DER KÜRZESTEN DÄMMERUNG

von

Á. Kiss

Summary: *(Contribution to the Problem of the Shortest Twilight.)* The author comes simply by an elementary mathematical method to the otherwise well-known solution of the problem of the shortest twilight.

Zusammenfassung: Der Verfasser gelangt durch elementare Mathematik auf kurzem Wege zur — übrigens schon bekannten — Lösung des Problems der kürzesten Dämmerung.

Die Dämmerung ist jene Periode des Tages während der die Sonne sich auf ihrer scheinbaren Himmelsbahn unter dem Horizont bewegt, aber ihre in der Atmosphäre zerstreuten Strahlen die Erdoberfläche erreichen. Sie ist die Periode des Überganges zwischen Tag und Nacht nach Sonnenuntergang und vor Sonnenaufgang. Der Übergang ist allmählich; mit der Zunahme der Sonnentiefe unter dem Horizont entfernt sich der von direkten Sonnenstrahlen durchdrungene Teil der Atmosphäre vom Beobachtungsort und immer weniger zerstreutes Licht erreicht die Erdoberfläche.

Das Ende der Abenddämmerung und der Beginn der Morgendämmerung fallen mit dem Zeitpunkt von 18° Sonnentiefe zusammen. Solange aber die Tiefe der Sonne unter dem Horizont nicht grösser ist als 6—6,5°, ist die Dämmerung so hell, dass man im Freien einen gedruckten Text lesen kann. Diese Periode der Dämmerung wird *bürgerliche Dämmerung* genannt, und die 18° Tiefe der Sonne unter dem Horizont ist die Grenze der *astronomischen Dämmerung*, da die Sterne nur am Ende der astronomischen Dämmerung in ihrer vollen Helligkeit gesehen werden. Im Morgen- sowie im Abendämmerung bei gleicher Tiefe der Sonne unter dem Horizont unter gleichen atmosphärischen Verhältnissen ist auch die Helligkeit der Dämmerung gleich; darum werden wir uns hier nur mit der Dauer der Abenddämmerung befassen.

Der Zeitpunkt von 18° Sonnentiefe ist eine konventionell angenommene Grenze der Dämmerung, und der ist in der Rechnungen gebräuchlich. Dieser Zeitpunkt ist aber nicht eine scharfe und ständige Grenze der Dämmerung. Die Dämmerungshelligkeit nimmt bis 16° Sonnentiefe allmählich ab, von diesem Wert bis 18° Sonnentiefe wird nur kaum bemerkbar schwächer, aber in der Richtung des Azimuts der Sonne unmittelbar über dem Horizont kann der Himmel bis noch etwa 20° Sonnentiefe heller sein als die Nachthelligkeit des Himmels. Da das Dämmerungslicht zerstreutes Licht ist, kann die Beleuchtungsstärke des Himmels auf einer waagerechten Fläche vom momentanen physischen Zustand der Atmosphäre auch bei gleichen astronomischen Faktoren verschieden sein, und die Sonnentiefe beim Beginn oder Ende der Dämmerung schwankt um 18° unter dem Horizont.

Der physische Zustand der Atmosphäre aber kann die von astronomischen Faktoren, der *geographischen Breite des Beobachtungsortes* und der *Deklination der Sonne* bestimmte Dauer der Dämmerung nur in geringem Masse modifizieren.

In unserer Arbeit wird die atmosphärische Refraktion bei der Bestimmung der Dauer der Nacht und der Dämmerung sowie bei der Bestimmung der geographischen Breitengraden im Zusammenhang mit diesen der Einfachheit halber ausser Acht gelassen und die Sonne mit ihrem Mittelpunkt ersetzt.

Im Sommerhalbjahr (wenn die Sonnendeklination in der Richtung des Himmelpols der Hemisphäre des Beobachtungsorts gemessen wird) verlängert sich die Dauer der Dämmerung zusammen mit der Zunahme der geographischen Breite des Standortes und der Deklination der Sonne. Die Dauer der Dämmerung kann aber nur so lange wachsen wie die Dämmerung sich nicht auf die ganze Nachtperiode verbreitet.

Wenn die Sonne sich bei unterer Kulmination 18° oder weniger unter dem Horizont befindet, füllt die Dämmerung die ganze Nacht aus. Das geschiet, wenn die Summe der Werte der geographischen Breite des Beobachtungsortes und der Deklination der Sonne 72° gleich, oder grösser als

$72°$ ist, als wenn $\varphi+\delta_{\odot} \geqq 72°$. ($\varphi$ = die geographische Breite oder die Polhöhe des Standortes, $\delta_{\odot}$ = die Deklination der Sonne. Dieser letztere Wert wird im weiteren mit δ bezeichnet.)

Die die ganze Nacht ausfüllende Dämmerung is dann am längsten, wenn sich die Sonne bei unterer Kulmination eben 18° unter dem Horizont befindet, d. h. wenn $\varphi+\delta = 72°$. Wenn $\varphi+\delta > 72°$, dann ist die Sonnentiefe bei unterer Kulmination kleiner als 18°, und zwar um einen Wert $\varphi+\delta-72°$ kleiner; also wenn der Wert der Polhöhe des Standortes und der Deklination von dem entsprechenden Wert der Gleichung $\varphi+\delta = 72°$ weiter wächst, dann nimmt die Dauer der Nacht und damit auch die der Dämmerung ab.

Im Sinne des obigen ist 48,5° die niederste geographische Breite wo es im Laufe des Jahres mindestens einmal um die Sommersonnenwende die ganze Nacht hindurch eine Dämmerung gibt (wenn die grösste Deklination der Sonne der Einfachheit halber als 23,5° angenommen wird). Dementsprechend verlängert sich die Dauer der Dämmerung unter den Breiten nicht höher als 48,5° im Sommerhalbjahr mit der Zunahme der Deklination der Sonne bis zur Sommersonnenwende.

Unter den Breiten höher als 48,5° beim Wert $\delta = 72°-\varphi$ gibt es Dämmerung die ganze Nacht hindurch, und die Dauer der Dämmerung vom Wert $\delta = 72°-\varphi$ nimmt mit der Zunahme der Deklination zusammen mit der Dauer der Nacht ab.

Unter 72° geographischer Breite verbreitet sich die Dämmerung auf die ganze Nacht schon bei 0° Sonnendeklination und mit der Zunahme der Deklination nimmt die Dauer der Dämmerung zusammen mit der Dauer der Nacht schon von der Frühjahrs-Tagundnachtgleiche an ab.

Unter den Breiten grösser als 72° hat die Sonne südliche (in der Richtung des entgegengesetzten Pols gemessene) Deklination wenn die Dämmerung die ganze Nacht ausfüllt.

Wenn der gesamte Wert der Polhöhe des Standortes und der Deklination der Sonne 90° oder grösser als 90° ist, also wenn $\varphi+\delta \geqq 90°$, ist die Sonne zirkumpolar über dem Horizont. Da es da keine Nacht ist, gibt es auch keine Dämmerung.

Die niedrigste geographische Breite, wo die Sonne um die Sommersonnenwende zirkumpolar ist, ist 66,5°. Die Dauer der Zirkumpolarität nimmt von 66,5° Breite an mit zunehmender Polhöhe zu.

Während des Jahres beginnt die Zirkumpolarität der Sonne mit zunehmender Deklination, beim Wert $\delta = 90°-\varphi$, und endet mit abnehmender Deklination, ähnlicherweise beim Wert $\delta = 90°-\varphi$. Die Punkte mit gleicher Deklination sind in gleichem Abstand vom Sonnenwendepunkt auf der Ekliptik; daher sind das Beginn und das Ende der Zirkumpolarität in der Zeit symmetrisch in bezug auf die Sonnenwende.

Im Sommerhalbjahr ist die Veränderung der Dauer der Dämmerung trotz dem obigen verhältnismässig einfach, da wenn wir uns mit der Zirkumpolarität der Sonne über dem Horizont nicht befassen, weil sie nur die Frage beantwortet, wann es mangels einer Nacht keine Dämmerung gibt, und wenn man die Veränderung der Dauer der Dämmerung nur bis dann untersucht wenn die Dämmerung die ganze Nacht ausfüllt, wenn ihre Dauer im Vergleich zur Dauer der Nacht nicht zunehmen kann aber auch nicht abnimmt, dann kann man feststellen, dass im Sommerhalbjahr die Dauer der Dämmerung mit der Polhöhe des Standortes und der Deklination der Sonne zunimmt.

Im Winterhalbjahr ist die Veränderung der Dämmerungsdauer komplizierter auch wenn wir uns mit der Zirkumpolarität und der die ganze Nacht ausfüllenden Dämmerung nicht beschäftigen. Aber im Winterhalbjahr darf man diese nicht ausser Acht lassen.

Die Schwierigkeit in der Erkennung der Dämmerungsverhältnissen des Winterhalbjahres entsteht dadurch, dass mit der Zunahme der Deklination der Sonne im Winterhalbjahr die Dauer der Dämmerung nach der Herbstnachtgleiche von der Polhöhe abhängig bis zu einem „gewissen“ Deklinationswert ab, dann wieder zunimmt. Ähnlicherweise, innerhalb eines „gewissen“ Wertes der Sonnendeklination, also eine Zeitlang nach der Herbstnachtgleiche (und vor der Frühlingsnachtgleiche) nimmt die Dämmerungsdauer mit der Zunahme der Polhöhe von der Deklination abhängig bis zu einer „gewissen“ geographischen Breite ab, dan mit weiterer Zunahme der Breite wieder zu. Wenn die Deklination der Sonne grösser ist als der obenerwähnte „gewisse“ Wert, dann nimmt die Dämmerungsdauer mit der Zunahme der Polhöhe zu.

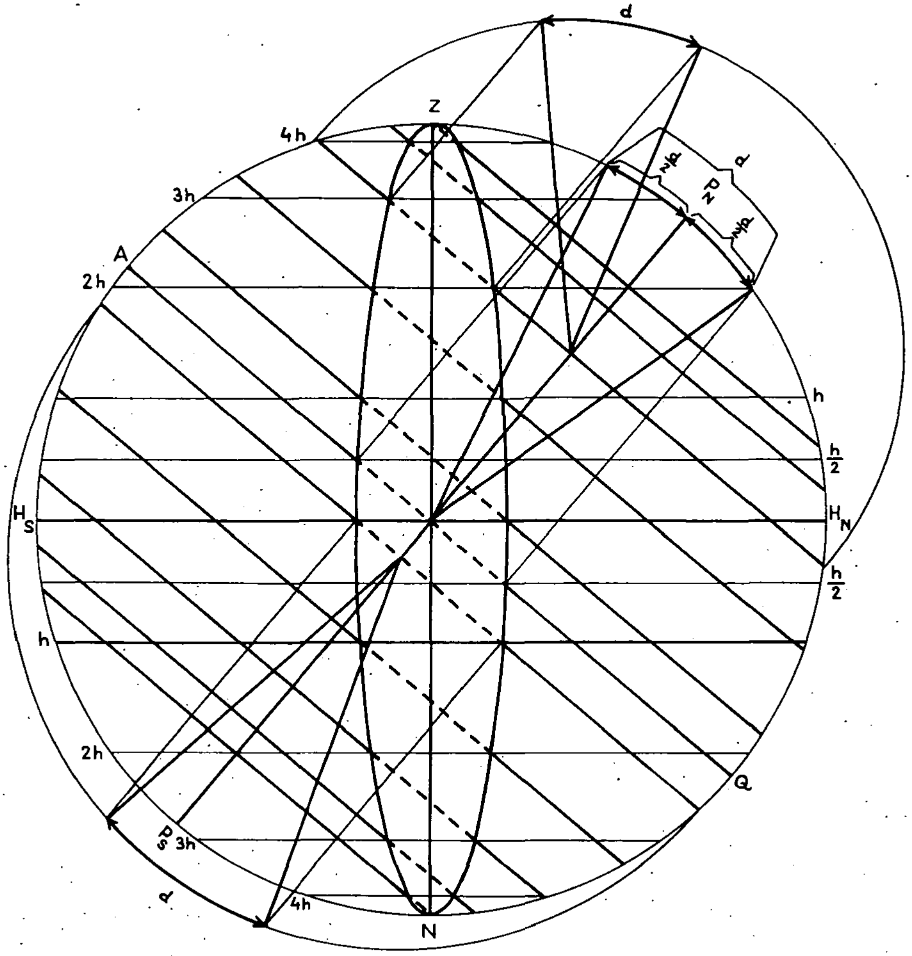
Der portugiesische Mathematiker NUÑEZ hat schon 1542 in seinem Buch „De crepusculis“ die Frage aufgeworfen, an welchen Tag des Jahres an einem Ort gegebener geographischer Breite die Dämmerung am kürzesten ist. NUÑEZ selbst konnte auf die Frage nicht antworten. Nach ihm haben sich mehrere Forscher während fast zwei Jahrhunderte mit der Lösung des Problems beschäftigt, aber ohne Erfolg. Endlich löste JOHANN BERNOULLI das Problem mit Differentialrechnung, aber er erhielt einen schwer brauchbaren Erfolg. Nach STOLL (1): „Diese zuerst von Nuñez in seinem Werke De crepusculis gestellte Aufgabe wurde zum ersten Male nach jahrelangen Suchen von Joh. Bernoulli (Opera I, 64) gelöst (vergl. Wolf, Handb. d. Math. II. 178). Sowohl er, als auch andere hervorragende Mathematiker erhielten die Lösung nur durch Vermittelung einer schwer discutierbaren Gleichung des vierten Grades, deren Wurzeln eigentlich zwei von einander verschiedenen Aufgaben angehörten, die in der Beziehung von relativen Maximis und Minimis standen, ohne dass diese Beziehung von ihnen erkannt worden wäre. Der erste, welcher von den beiden correspondierenden Aufgaben wenigstens die eine in befriedigender Weise löste, war nach Wolf a.a.O. der verstorbene Kopenhagener Astronom d'Arrest (Astron. Nachr. 1085 von 1857); derselbe hat übrigens das bei seiner Lösung auftretende Maximum nicht berücksichtigt.“

In seinem 1883 veröffentlichten zitierten Werk löste STOLL die Aufgabe mit elementaren Mathematischen Mitteln bei guter Erkenntnis des Problems und erhielt eine sehr einfache Formel.

Als eine Folge der Einfachheit der Formeln von STOLL wird der Gedanke aufgeworfen, dass geometrische Zusammenhänge, die mit solchen einfachen Formeln ausgedrückt werden können, auch anschaulich sein müssen, und so das Problem der kürzesten Dämmerung gewissermassen anschaulich, mit noch einfacherem mathematischen Verfahren als das von STOLL gelöst werden kann. Dieses einfache Verfahren möchten wir hier darstellen.

Zwischen zwei Vertikalen, deren Azimut von dem ersten Vertikal nördlich und südlich gerechnet gleich ist, finden sich Abschnitte mit gleichen Bogengraden der Sonnenbahnen (oder Gestirnbahnen) an der Himmelsphäre des Beobachtungsortes gegebener geographischer Breite, und der Höhenunterschied zwischen den beiden Endpunkten der einzelnen Sonnenbahnschnitten ist auf allen Sonnenbahnen gleich; ferner ist das der kürzeste Bogen, der zwischen beliebigen zwei mit dem erwähnten Höhenunterschied gegebenen Punkten der Sonnenbahnen gemessen kann (Siehe Abb.) Das ist ein einfaches geometrisches Gesetz, das auch ohne sphärischen astronomischen Inhalt formuliert werden kann. Nämlich sind die Sonnenbahnkreise parallele Kugelkreise, und die zwei Vertikalen bilden ein Kugelzweieck, dessen winkelhalbierender Grosskreis auf den durch den Pol der Prallelkreise und die Scheitelpunkte des Kugelzweiecks laufenden Grosskreis senkrecht ist. Die zwei Grosskreise des Kugelzweiecks schnitt gleiche Bögen aus den Parallelkreisen aus, der sphärische Abstand der zwei Endpunkte der einzelnen Bögen von den einzelnen Scheitelpunkten des Kugelzweiecks unterscheidet sich auf jedem Bogen mit gleichem Wert, ferner ist dies auf jedem Parallelkreis der kürzeste Bogen, auf dem der Unterschied zwischen den von den einzelnen Scheitelpunkten des Kugelzweiecks gerechneten sphärischen Abstanden der zwei Endpunkten dem erwähnten Wert gleich ist.

Während der Dämmerung verändert sich die Höhe der Sonne um 18°. Im Sinne des Vorangehenden ergibt sich diese Höhenveränderung von 18° bei der kleinsten Änderung des Stundenwinkels auf einer Sonnenbahn einer Deklination mit der das vom ersten Vertikal gerechnete Azimut der Sonne in 0° Höhe und 18° Tiefe unter dem Horizont gleich ist, wenn am Beginn und am Ende der Dämmerung die Ebene


d
Z
S
4h
3h
A
2h
h
$\frac{h}{2}$
H_S
H_N
$\frac{h}{2}$
h
2h
Q
P_S 3h
d
4h
N

Die Abbildung stellt die auf die Ebene des Himmelsmeridians senkrecht projiziertes Bild der Himmelskugel, mit dem wahren Horizont, mit dem Himmelsäquator, mit Almukantaraten, Gestirnbahnen, mit dem ersten Vertikal und mit zwei vom ersten Vertikal gleichem Abstand befindlichen Vertikalen.

Die zwei Vertikalen bilden ein Kugelzweieck, dessen winkelhalbierender Grosskreis der erste Vertikal, auf dem Meridiankreis senkrecht ist, und demzufolge sind die zwischen den zwei Vertikalen befindlichen Bögen in Graden aller Gestirnbahnen gleich. Auch die Höhenunterschiede der beiden Endpunkte der sich zwischen den beiden Vertikalen streckenden einzelnen Bögen sind gleich. Diese Bögen sind zugleich die kürzeste Strecken der Gestirnbahnen, die zwischen beliebigen zwei mit dem erwähnten Höhenunterschied gegebenen Punkten der einzelnen Gestirnbahnen gemessen kann.

In der Abbildung sind die erwähnten Höhenunterschiede mit **h** bezeichnet. Die Projektionen der Halbkreisen von drei Gestirnbahnen (einer unter ihnen ist der Himmelsäquator) sind auch auf die Meridianebene umgedreht dargestellt und ihre zwischen den beiden Vertikalen befindlichen Bögen auf die Halbkreise der entsprechenden Gestirnbahnen zurück-projiziert gezeichnet. Diese Bögen sind mit **d** bezeichnet.

Der Horizont halbiert den betreffende Bogen des Himmelsäquators und so dessen Strecke über dem Horizont und unter dem Horizont gleicherweise $\frac{d}{2}$ sind. Die Endpunkte des betreffenden Aquatorbogens sind in Höhe $\frac{h}{2}$ über dem Horizont und $\frac{h}{2}$ Tiefe unter dem Horizont.

Im Sinne des obigen ist es einzusehen, dass $\sin\frac{d}{2} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\cos\varphi}$. Ferner den vom ersten Vertikal gerechnete Azimut A_0 des Endpunktes des Äquatorbogens drückt die Gleichung $\sin A_0 = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\frac{h}{2}$ fast anschaulich aus. Die Morgen- und Abendweite A_δ eines Gestirnes wird durch die Gleichung $\sin A_\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi}$ ausgedrückt, und wenn der Azimut des Aufgangpunktes oder Untergangpunktes der Gestirnbahn dem Azimut des obenerwähnten Endpunktes des Himmelsäquatorbogens gleich ist, dann $A_0 = A_\delta$, also $\frac{\sin\delta}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\frac{h}{2}$, und $\sin\delta = \sin\varphi \operatorname{tg}\frac{h}{2}$. Im Falle der Sonnenbahn ist der durch die Gleichung gedrückte Wert der Deklination, mit dem gelangt die Sonne in der kürzesten Zeit vom Horizont zu **h** Höhe oder von **h** Tiefe zum Horizont. Falls **h** mit 18° (oder 6°) substituert wird, ist der Wert von δ mit dem am Tag der kürzesten astronomischen (oder bürgerlichen) Dämmerung gegebenen Deklinationswert der Sonne gleich.

des Azimutkreises der Sonne mit der Ebene des ersten Vertikals gleiche Winkel einschliesst. Zwischen diesen zwei Vertikalen — wie es zu sehen ist — sind zahllose Sonnenbahnbogen mit verschiedenen Deklinationen zu finden und auf jedem dieser Bögen ist die Höhenveränderung der Sonne 18°. Der Bogen des Äquators wird von dem Horizontkreis halbiert und die Höhe eines Endpunktes über dem Horizont und die Tiefe des anderen unter dem Horizont sind gleich, $\frac{18°}{2} = 9°$. Gleiche Bögen des Äquators über und unter dem Horizont drücken gleiche Änderung des Stundenwinkels aus.

Nun werde die Aufgabe verallgemeinert und statt des konkreten Wertes 18° werde eine Höhenveränderung **h** genommen. Die kürzeste, in Bogengraden der Sonnenbahn ausgedrückte Zeitdauer, während der die Höhe der Sonne (oder eines Gestirnes) sich mit einem Wert **h** verändert, werde mit **d** bezeichnet. Sowohl über wie auch unter dem Horizont erreicht die Sonne eine Höhenveränderung $\frac{\mathbf{h}}{2}$ auf. einem Bogen von $\frac{\mathbf{d}}{2}$ Grad, also mit einer Veränderung des Stundenwinkels $\frac{\mathbf{d}}{2}$. Dementsprechend $\sin\frac{\mathbf{d}}{2} = \frac{\sin\frac{\mathbf{h}}{2}}{\cos\varphi}$. Da jeder Sonnenbahnbogen zwischen Werticalkreisen mit vom ersten Vertical nördlich und südlich gleichem Azimut gleich lang ist, wenn für **h** 18° substituiert wird, wird als Resultat die Dauer bzw. die Hälfte der Dauer der Kürzesten Dämmerung in der gegebenen Breite erhalten.

Werde der Azimut des Punktes des Äquators von $\frac{\mathbf{h}}{2}$ Höhe mit A_0, der Azimut des im Horizont gelegenen Punktes des kürzesten Sonnenbahnbogens zwischen dem Horizont und dem Almukantarat von **h** Höhe mit A_δ bezeichnet (es handelt sich um die vom ersten Vertikal gerechneten Azimuten). Nach dem obigen

$A_0 = A_\delta$ also

$\sin A_0 = \sin A_\delta$

$\sin A_0$ kann ausgedrückt werden aus der Gleichung

$$\mathrm{tg}\frac{\mathbf{h}}{2} = \mathrm{tg}\,(90°\text{-}\varphi)\sin A_0$$

$$\mathrm{tg}\frac{\mathbf{h}}{2} = \mathrm{ctg}\,\varphi\sin A_0$$

$$\sin A_0 = \mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\frac{\mathbf{h}}{2}$$

$\sin A_\delta$ ist der Wert den Morgen- und Abendweite des Sonnenaufganges bzw. des Unterganges, wenn der Wert der Weite vom ersten Vertical gerechnet wird.

$$\sin A_\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi}$$

Aus dem obigen folgend

$$\frac{\sin\delta}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\frac{h}{2}$$

$$\sin\delta = \cos\varphi \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\frac{h}{2}$$

$$\sin\delta = \sin\varphi \operatorname{tg}\frac{h}{2}$$

Unter einer gegebenen geographischen Breite gelangt die Sonne (oder ein Gestirn) mit so bestimmter Deklination in der kürzesten Zeit vom Horizont zu **h** Höhe oder von **h** Tiefe zum Horizont. Im Falle einer Veränderung der Tiefe unter dem Horizont ist die Deklination eine „südliche". Falls **h** mit 18° (oder 6°) substituiert wird, ist der Wert von δ mit der am Tag der kürzesten Dämmerung gegebenen Deklination der Sonne gleich.

Die aus der Formel

$\sin\delta = \sin\varphi \operatorname{tg}\frac{h}{2}$ erhaltene Gleichung

$$\sin\varphi = \frac{\sin\delta}{\operatorname{tg}\frac{h}{2}} = \sin\delta \operatorname{ctg}\frac{h}{2}$$

bestimmt die geographische Breite in der die Sonne an einem gegebenen Tag des Jahres, also bei einer gegebener Deklination, ihren Bahnbogen durchläuft in der kürzesten Zeit zwischen dem Horizont und dem Almukantarat in **h** Höhe über oder **h** Tiefe unter dem Horizont. Beim Substituieren des entsprechenden **h** Wertes ist die Dämmerung am kürzesten am Tag gegebener Sonnendeklination in der als Erfolg erhaltenen Breite.

In der Kenntnis der auf die kürzeste Dämmerung bezüglichen Zusammenhänge kann die Veränderung der Dauer der Dämmerung mit der Polhöhe und der Deklination der Sonne auch im Winterhalbjahr verfolgt werden.

Am Äquator gibt es kein Winterhalbjahr und Sommerhalbjahr, aber gibt es ein Halbjahr mit nördlicher und ein Halbjahr mit südlicher Sonnendeklination. Die Dauer der Dämmerung nimmt in gleichem Masse in beiden Halbjahren mit der Zunahme der Deklination zu.

In der Zone zwischen dem Äquator und 72° geographischer Breite nimmt die Dämmerungsdauer im Winterhalbjahr mit der Zunahme der Sonnendeklination bis zum durch die Gleichung $\sin\delta = \sin\varphi \operatorname{tg} 9°$ bestimmten Deklinationswert ab, dann nimmt sie mit weiterer Zunahme der Deklination wieder zu, und diese Zunahme dauert unter den Breiten nicht höher als 66,5° bis zur Wintersonnenwende. Die längste Dämmerung des Winterhalbjahres ist um den Mittiwinter. Die längste Dämmerung des Winterhalbjahres ist unter den Breiten niederer als 66,5° kürzer als die längste Dämmerung des Sommerhalbjahres. (Wie es schon erwähnt wurde ist die längste Dämmerung des Sommerhalbjahres unter den Breiten höher als 48,5° nicht um den Mittsommer.)

Unter 66,5° Breite ist die Sonne um die Wintersonnenwende zirkumpolar unter dem Horizont und die Dämmerungsdauer ist dann länger als die längste Dämmerung des Sommerhalbjahres (die unter dieser Breite mit 5,5° Sonnendeklination gegeben ist).

Unter den Breiten höher als 66,5° beginnt die Zirkumpolarität der Sonne unter dem Horizont schon früher als die Wintersonnenwende, beim Wert der „südlicher" Deklination, $\delta = 90° - \varphi$ und das ist unter den Breiten höher als 66,5° aber niederer als 72° der Tag mit der längsten Dämmerung nicht nur im Winterhalbjahr, sondern im ganzen Jahr. So verkürzt sich die Dämmerungsdauer unter den erwähnten Breiten im Winterhalbjahr mit der Zunahme der Deklination bis zum dem Zusammenhang $\sin\delta = \sin\varphi \operatorname{tg}\frac{h}{2}$ entsprechenden Deklinationswert, von da an verlängert sie sich bis zum Wert $\delta = 90° - \varphi$, dann verkürzt sie sich wieder bis zur Wintersonnenwende.

Unter den Breiten höher als 72° gibt es die ganze Nacht hindurch dauernde Dämmerung nicht nur im ganzen Sommerhalbjahr und an den Tagen der Tagundnachtgleiche, sondern auch im Winterhalbjahr bis zum Wert $\delta = \varphi - 72°$. Da die Nacht im Winterhalbjahr mit der Zunahme der Deklination länger wird, verlängert sich auch die Dämmerung unter den Breiten höher als 72° bis zu einer Deklination die dem Wert $\varphi - 72°$ entspricht, dann nimmt sie unter den Breiten niederer als 81° bis zu einem der Gleichung $\sin \delta = \sin \varphi \operatorname{tg} \frac{h}{2}$ entsprechenden Deklinationswer ab, dann nimmt sie bis zum Wert $\delta = 90° - \varphi$ wieder zu, und von dieser Deklination ab bis zur Wintersonnenwende nimmt sie wieder ab.

Unter 81° Breite fällt der Tag der ersten, die ganze Nacht ausfüllenden Dämmerung des Winterhalbjahres mit dem ersten Tag der Zirkumpolarität der Sonne unter dem Horizont zusammen, weil $81° - 72° = 90° - 81°$. So verlängert sich die Dauer der Dämmerung unter dieser Breite im Winterhalbjahr bis 9° Deklination. Dann gibt es Dämmerung den ganzen Tag, und die Zirkumpolarität der Sonne unter dem Horizont beginnt, während der die Dauer der Dämmerung bis zum Mittwinter abnimmt.

Es ist ersichtlich aus den obigen, dass die grösste Deklination, bis zu deren Wert im Winterhalbjahr die Dämmerungsdauer wo immer abnehmen kann, ist kleiner als 9°, da der Zusammenhang $\sin \delta = \sin \varphi \operatorname{tg} 9°$ unter 81° Breite nicht mehr gültig ist, weil die tägliche Höhenveränderung der Sonne eben 18° ist, und die ganze tägliche Bahn der Sonne mit 9° Deklination zwischen dem Horizont und 18° Almukantarat liegt. Unter den Breiten höher als 81° erreicht die tägliche Höhenveränderung der Sonne 18° nicht.

Unter den Breiten höher als 81° ist $90° - \varphi < \varphi - 72°$ und die Zirkumpolarität der Sonne beginnt mit kleinerer Deklination als der grösste Wert der Deklination wobei noch die ganze Nacht Dämmerung gibt. Dementsprechend nimmt die Dämmerungsdauer im Winterhalbjahr unter den Breiten höher als 81° mit der Zunahme der Deklination bis zum Deklinationswert $90° - \varphi$ zu, dann beginnt die Zirkumpolarität der Sonne unter dem Horizont, das ist aber bis zu einem Deklinationswert $\varphi - 72°$ ununterbrochene Dämmerung, dann von dieser Deklination bis zum Mittwinter nimmt die Dämmerungsdauer ab.

Unter 84,5° Breite um die Wintersonnenwende gibt es schon keine Dämmerung, nur volle Nacht, und unter den Breiten höher als 84,5° vom Deklinationswert $108° - \varphi$ ab gibt es keine Dämmerung.

Am Pol gibt es Dämmerung im Winterhalbjahr solange der Wert der Sonnendeklination zwischen 0° und 18° ist.

LITERATUR

1. DR. STOLL (in Bensheim a. d. Bergstr.): Das Problem der kürzesten Dämmerung. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 28, 1883, 150—156.